Ma trận bảo mật

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu I. Ma trận bảo mật *(6,0 điểm)*

Hệ thống máy chủ lưu trữ của công ty công nghệ **X** sử dụng *Khóa ma trận* kích thước 3×3 để xác thực quyền truy cập. Theo thiết kế của kỹ sư trưởng, một *Khóa ma trận* chỉ được coi là hợp lệ khi thỏa mãn đồng thời hai quy tắc an toàn:

- **Tính toàn vẹn:** Tổng các số nguyên trên mỗi hàng ngang và mỗi cột dọc đều phải hoàn toàn bằng nhau.
- **Chống lặp:** Ma trận phải chứa ít nhất 2 con số có giá trị khác biệt.

Vinh, một chuyên viên bảo mật, đang rà soát lại cơ sở dữ liệu thì phát hiện một sự cố ổ cứng đã làm hỏng hàng loạt *Khóa ma trận*. Ở mỗi khóa bị lỗi, có đúng một vị trí bị mất dữ liệu (được đánh dấu bằng ký tự ?). Tám vị trí còn lại của khóa đó vẫn đọc được bình thường.

Yêu cầu: Cho trạng thái hiện tại của các ma trận bị lỗi, hãy giúp Vinh xác định chính xác con số bị mất tại vị trí ? để khôi phục lại từng Khóa ma trận hợp lệ ban đầu.

Dữ liệu vào từ file văn bản MTX.INP

- Dòng đầu tiên gồm số nguyên T ($1 \leq T \leq 1000$) - thể hiện số lượng *Khóa ma trận* bị lỗi mà Vinh cần khôi phục.
- T khối tiếp theo, mỗi khối gồm 3 dòng, mỗi dòng chứa 3 phần tử cách nhau bởi khoảng trắng. Các phần tử là số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 10^9. Riêng vị trí mất dữ liệu được biểu diễn bằng ký tự `'?'`.

Kết quả ghi ra file văn bản MTX.OUT:

- Với mỗi *Khóa ma trận*, in ra trên một dòng giá trị nguyên cần điền vào vị trí `'?'`.
- Trong trường hợp dữ liệu của khóa đó đã bị sai lệch hoàn toàn (nghĩa là không tồn tại bất kỳ số nguyên nào điền vào `'?'` để thỏa mãn cả 2 quy tắc an toàn), hãy in ra **`IMPOSSIBLE`**.
- Dữ liệu đảm bảo vị trí cần điền nếu tồn tại cách điền thì luôn có giá trị tuyệt đối không vượt quá 10^9.

Ví dụ:

MTX.INP	MTX.OUT
2 1 2 3 ? 1 2 2 3 1 2 2 2 2 2 2 2 ? 2	3 IMPOSSIBLE

Biểu thức lớn nhất

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu II. Biểu thức lớn nhất *(5,0 điểm)*

Cho một dãy gồm n số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bạn cần đặt chính xác 2 phép nhân ($\times$) và $n-3$ phép cộng ($+$) xen vào giữa n số này sao cho giá trị của biểu thức toán học thu được là lớn nhất có thể.

Chú ý:

- Tuyệt đối không được thay đổi thứ tự xuất hiện của các phần tử a_i trong biểu thức ban đầu.
- Theo quy tắc toán học, phép nhân sẽ được thực hiện trước phép cộng.

Ví dụ: với $n = 5$ và dãy a_i là 4,7,1,5,3 thì bạn có thể có các biểu thức:

- $4 + 7 \times 1 + 5 \times 3$
- $4 \times 7 \times 1 + 5 + 3$

Dữ liệu vào từ file văn bản MXEXP.INP:

- Một dòng duy nhất bao gồm một số nguyên n ($4 \leq n \leq 10^6$).
- Dòng thứ hai gồm n số nguyên a_i ($1 \leq a_i \leq 10^5$).

Kết quả ghi ra file văn bản MXEXP.OUT:

- Ghi ra một số nguyên duy nhất là giá trị lớn nhất của biểu thức tìm được.

Ràng buộc:

- Có 60% số test tương ứng với 60% số điểm có $n \leq 500$.
- Có 20% số test tương ứng với 20% số điểm có $n \leq 1000$.
- Có 20% số số test tương ứng với 20% số điểm không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

MXEXP.INP	MXEXP.OUT
5 4 7 1 5 3	44
4 2 3 4 5	62

Trung vị tần số

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu III. Trung vị tần số *(4,0 điểm)*

Cho một xâu ký tự S có độ dài n, chỉ gồm các chữ cái la-tinh in thường từ **a** đến **z**.

Một xâu con X của S là một chuỗi gồm các ký tự nằm ở các vị trí liên tiếp nhau trong S. Với mỗi xâu con X, ta định nghĩa hàm $f(X)$ là số lần xuất hiện của ký tự xuất hiện nhiều nhất trong X.

Ví dụ: Với xâu con X = **abaca**, ký tự **a** xuất hiện **3** lần, **b** xuất hiện 1 lần, **c** xuất hiện 1 lần. Ký tự xuất hiện nhiều nhất là **a** với số lần xuất hiện là 3, do đó $f(X) = 3$.

Gọi D là một danh sách chứa giá trị $f(X)$ của tất cả các xâu con X có thể tạo ra từ S (bao gồm cả các xâu con giống nhau nhưng nằm ở vị trí khác nhau).

Yêu cầu: Hãy tìm giá trị trung vị của danh sách D

Chú ý: *Trung vị của một danh sách được xác định là phần tử nằm ở chính giữa khi danh sách đó được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nếu danh sách có số lượng phần tử chẵn và có hai giá trị ở giữa, giá trị nhỏ hơn sẽ được chọn làm Trung vị.*

Dữ liệu vào từ file văn bản MXFRQ.INP

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương n ($1 \leq n \leq 2 \times 10^5$) là độ dài của xâu S.
- Dòng thứ hai chứa xâu ký tự S gồm n chữ cái in thường.

Kết quả ghi ra file văn bản MXFRQ.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất là giá trị trung vị tìm được.

Ràng buộc:

- 40% số test tương ứng với 40% số điểm có $n \leq 100$.
- 40% số test tương ứng với 40% số điểm có $n \leq 5000$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

MXFRQ.INP	MXFRQ.OUT	Giải thích
4 **aaaa**	**2**	Xâu S = **aaaa** có độ dài $n = 4$, tổng cộng có $\frac{4\times5}{2} = 10$ xâu con liên tiếp. Ta tính giá trị $f(X)$ cho từng xâu con X: • Các xâu con độ dài 1: **a**, **a**, **a**, **a** (4 xâu) → $f(X)$ đều là 1. • Các xâu con độ dài 2: **aa**, **aa**, **aa** (3 xâu) → $f(X)$ đều là 2. • Các xâu con độ dài 3: **aaa**, **aaa** (2 xâu) → $f(X)$ đều là 3. • Xâu con độ dài 4: **aaaa** (1 xâu) → $f(X)$ là 4. Danh sách D thu được là: $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\}$. Sắp xếp tập hợp theo thứ tự không giảm, ta được danh sách 10 phần tử. Vì danh sách có độ dài chẵn, hai phần tử ở giữa là phần tử thứ 5 (giá trị 2) và phần tử thứ 6 (giá trị 2). Giá trị nhỏ hơn trong hai phần tử này là 2. Vậy trung vị là 2.

Trạm phát sóng

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu IV. Trạm phát sóng *(3,0 điểm)*

Bạn là một kỹ sư viễn thông được giao nhiệm vụ thiết kế hệ thống trạm phát sóng dọc theo một tuyến đường cao tốc. Có n vị trí tiềm năng để đặt trạm, được đánh số thứ tự từ 1 đến n theo đúng thứ tự chúng nằm dọc tuyến đường. Qua quá trình khảo sát địa hình, đo đạc và tra cứu quy hoạch tần số của cơ quan quản lý, bạn thu thập được 2 thông số cố định cho mỗi vị trí:

- Nếu trạm tại vị trí thứ i được kích hoạt, nó sẽ đóng góp thêm a_i đơn vị dung lượng băng thông cho toàn hệ thống. *(Lưu ý: Một số vị trí ở giai đoạn này mới chỉ là "trạm chờ", chưa lắp đặt thiết bị truyền dẫn lõi, do đó dung lượng a_i cung cấp có thể bằng 0).*
- Do đặc điểm địa hình và giấy phép tần số riêng của từng khu vực, vị trí thứ i chỉ được cấp phép hoạt động trên đúng một dải băng tần cố định, ký hiệu là c_i.

Theo nguyên lý sóng vô tuyến, hai trạm đặt sát nhau nếu phát cùng một dải tần sẽ gây ra hiện tượng nhiễu đồng kênh, dẫn đến rớt mạng, vì vậy không thể kích hoạt đồng thời 2 trạm liền kề như vậy. Ngược lại, nếu 2 trạm kề nhau hoạt động trên các dải tần khác nhau, tín hiệu của chúng không gây nhiễu lẫn nhau, nên bạn hoàn toàn có thể kích hoạt cả hai cùng lúc.

Yêu cầu: Trong số tất cả các cách chọn tập hợp trạm phát sóng để kích hoạt sao cho tuân thủ tuyệt đối nguyên tắc an toàn nêu trên, hãy xác định:

1. Tổng dung lượng băng thông lớn nhất có thể đạt được.
2. Số lượng bản quy hoạch (cách chọn trạm để kích hoạt) khác nhau giúp hệ thống đạt được đúng mức dung lượng băng thông tối đa đó. Hai bản quy hoạch được xem là khác nhau nếu có ít nhất một vị trí trạm được kích hoạt ở bản này nhưng không được kích hoạt ở bản kia.

Vì số lượng bản quy hoạch tối ưu có thể rất lớn, hãy in ra phần dư của số cách chia cho $10^9 + 7$. (Lưu ý: việc không kích hoạt trạm nào cũng được tính là một bản quy hoạch hợp lệ, với tổng dung lượng bằng 0)

Dữ liệu vào từ file văn bản BTSP.INP

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương n ($1 \le n \le 10^5$) — số lượng vị trí tiềm năng dọc tuyến đường cao tốc.
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên a_i ($0 \le a_i \le 10^9$) — dung lượng băng thông mà mỗi trạm cung cấp nếu được kích hoạt.
- Dòng thứ ba chứa n số nguyên c_i ($1 \le c_i \le n$) — mã băng tần được cấp phép cho từng vị trí.

Kết quả ghi ra file văn bản BTSP.OUT:

- Dòng đầu tiên in ra một số nguyên — tổng dung lượng băng thông lớn nhất có thể đạt được.
- Dòng thứ hai in ra một số nguyên — số lượng bản quy hoạch tối ưu, lấy phần dư cho $10^9 + 7$.

Dữ liệu vào từ file văn bản BTSP.INP

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương n ($1 \leq n \leq 10^5$) — số lượng vị trí tiềm năng dọc tuyến đường cao tốc.
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên a_i ($0 \leq a_i \leq 10^9$) — dung lượng băng thông mà mỗi trạm cung cấp nếu được kích hoạt.
- Dòng thứ ba chứa n số nguyên c_i ($1 \leq c_i \leq n$) — mã băng tần được cấp phép cho từng vị trí.

Kết quả ghi ra file văn bản BTSP.OUT:

- Dòng đầu tiên in ra một số nguyên — tổng dung lượng băng thông lớn nhất có thể đạt được.
- Dòng thứ hai in ra một số nguyên — số lượng bản quy hoạch tối ưu, lấy phần dư cho $10^9 + 7$.

Ràng buộc:

- 30% số test tương ứng với 30% số điểm có $n \leq 20$.
- 30% số test tương ứng với 30% số điểm tiếp theo có $c_i \neq c_{i+1}$ với $1 \leq i < n$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm tiếp theo có $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$ và $a_i > 0 \; \forall i \in [1, n]$.
- 10% số test tương ứng với 10% số điểm tiếp theo có $a_i = 0 \; \forall i \in [1, n]$.
- 10% số test tương ứng với 10% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

BTSP.INP	BTSP.OUT	Giải thích
3 3 0 3 1 2 1	6 2	Dải băng tần của 3 vị trí trạm lần lượt là 1, 2, 1 (không có 2 trạm kề nhau nào cùng dải tần). Tổng dung lượng băng thông lớn nhất hệ thống có thể đạt được là $3 + 0 + 3 = 6$. Có 2 bản quy hoạch khác nhau giúp hệ thống đạt được mức dung lượng 6 này: • **Bản quy hoạch 1:** Kích hoạt trạm số 1 và trạm số 3. (Dung lượng $= 3 + 3 = 6$). • **Bản quy hoạch 2:** Kích hoạt cả 3 trạm số 1, số 2 và số 3. (Dung lượng $= 3 + 0 + 3 = 6$). Dù trạm số 2 không đóng góp thêm băng thông, đây vẫn được tính là một bản quy hoạch hợp lệ và khác biệt.

Quy hoạch cụm

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu V. Quy hoạch cụm *(3,0 điểm)*

Thành phố đang quy hoạch n nhà máy, được đánh số từ 1 đến n. Nhà máy thứ i mang lại giá trị kinh tế là c_i . Đồng thời, một số nhà máy được trang bị Hệ thống xử lý chất thải sinh thái (được đánh dấu bằng một mảng trạng thái E, trong đó $E_i = 1$ nếu nhà máy i có hệ thống này, và $E_i = 0$ nếu không có).

Có m tuyến đường vận chuyển hai chiều nối giữa các nhà máy. Các nhà máy có đường nối với nhau (trực tiếp hoặc qua các nhà máy trung gian) sẽ hợp thành một Cụm công nghiệp. Giá trị kinh tế của một cụm công nghiệp bằng tổng giá trị kinh tế của tất cả các nhà máy trong cụm đó.

Để đảm bảo yếu tố môi trường, thành phố quy định: *Một Cụm công nghiệp chỉ được cấp phép hoạt động nếu trong cụm đó có ít nhất một nhà máy được trang bị Hệ thống xử lý chất thải sinh thái (tức là có ít nhất một đỉnh có $E = 1$).*

Yêu cầu: Sở Quy hoạch cần chọn ra k Cụm công nghiệp hợp lệ để rót vốn đầu tư. Giả sử ta gọi X là độ chênh lệch kinh tế nhỏ nhất giữa 2 cụm bất kỳ trong số k cụm được chọn. Hãy tìm cách chọn sao cho X đạt giá trị lớn nhất có thể.

Dữ liệu vào từ file văn bản ICP.INP

- Dòng đầu tiên chứa ba số nguyên n, m, k $(1 \leq n, k \leq 10^5,\ 0 \leq m \leq 10^5)$.
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên dương $c_1, c_2, \dots, c_n$ $(1 \leq c_i \leq 10^9)$ là giá trị kinh tế của các nhà máy.
- Dòng thứ ba chứa n số nguyên $E_1, E_2, \dots, E_n$ $(E_i \in \{0, 1\})$ mô tả trạng thái hệ thống xử lý sinh thái của các nhà máy.
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa hai số nguyên dương u, v $(1 \leq u, v \leq n;\ u \neq v)$ mô tả một tuyến đường vận chuyển hai chiều nối giữa nhà máy u và nhà máy v.
- Dữ liệu đảm bảo luôn có ít nhất k Cụm công nghiệp hợp lệ.

Kết quả ghi ra file văn bản ICP.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất là giá trị lớn nhất của X tìm được.

Ràng buộc:

- 20% số test tương ứng với 20% số điểm có $m = 0$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm có $k = 2$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm có $k = 3$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm có tổng số lượng Cụm công nghiệp hợp lệ đúng bằng k.
- 10% số test tương ứng với 10% số điểm có $n, m \leq 20$.
- 10% số test còn lại tương ứng với 10% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

ICP.INP	ICP.OUT	Giải thích
8 5 3 2 4 6 1 5 10 3 8 1 0 0 1 0 1 0 0 1 2 2 3 4 5 7 8 2 1	2	Dựa vào các tuyến đường, ta gom được 4 cụm nhà máy: • **Cụm $\{1, 2, 3\}$:** Tổng kinh tế $= 12$. Hợp lệ $(E_1 = 1)$. • **Cụm $\{4, 5\}$:** Tổng kinh tế $= 6$. Hợp lệ $(E_4 = 1)$. • **Cụm $\{6\}$:** Tổng kinh tế $= 10$. Hợp lệ $(E_6 = 1)$. • **Cụm $\{7, 8\}$:** Tổng kinh tế $= 11$. **Bị loại** (do $E_7 = 0, E_8 = 0$) . Vì cần chọn đúng $k = 3$ cụm, Sở bắt buộc phải chọn 3 cụm hợp lệ trên với các giá trị kinh tế là $6, 10, 12$. Độ chênh lệch nhỏ nhất giữa 2 cụm bất kỳ trong cách chọn này là giữa 10 và 12, cho kết quả bằng 2.